V. Malakhovsky

About one class of congruences of conics in three dimensional projective space

In three dimensional space P_3 two-parametric family (congruence) of conics with two focal points A_1 and A_2 are investigated. Tangent lines to conic in these points are asymptotic tangent to the surface (A_0) and intersect at characteristic point A_0 of the plane of the conic. The tangents to lines on (A_i) corresponding to focal lines on the surface (A_j) $(i, j, k = 1,2,\ i \neq j)$ are asymptotic tangent to the plane (A_3) and intersect in characteristic point A_3 of the plane $(A_1 A_2 A_3)$.

УДК 574.76

В. С. Малаховский, Е. П. Юрова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Конгруэнция квадрик в трехмерном проективном пространстве, ассоциированная с парой поверхностей

Исследуется двупараметрическое семейство (конгруэнция) K_2 квадрик Q в трехмерном проективном пространстве P_3, обладающее следующими свойствами: на каждой квадрике $Q \in K_2$ имеются две различные фокальные точки A_1 и A_2, фокальные касательные в которых пересекаются в одной точке A_0 и являются асимптотическими касательными поверхности (A_0), а касательные к линиям на поверхности (A_i), соответствующим фокальным линиям на поверхности (A_j) ($i, j, k = 1, 2$; $i \neq j$), также пересекаются в точке A_3 и являются асимптотическими касательными поверхности (A_3), причем асимптотические линии, огибаемые касательными A_0A_i и A_3A_j, соответствуют, A_0 и A_3 полярно сопряжены.

Ключевые слова: квадрика, конгруэнция, асимптотическая касательная, фокальная точка, внешнее дифференцирование, торс, гармоническое деление.

1. Система уравнений Пфаффа конгруэнции K_2

Уравнение квадрики $Q \in K_2$ при соответствующей нормировке вершин репера $\{A\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 0,1,2,3)$ запишется в виде

$$F \overset{def}{=} 2x^1x^2 - (x^0)^2 - (x^3)^2 = 0\,. \tag{1.1}$$

Используя структурные формы точки $M \in P_3$ [1, с. 51]

$$\Omega^\alpha = dx^\alpha + x^\beta \omega_\beta^\alpha + \theta x^\alpha\,, \tag{1.2}$$

$d\theta \equiv 0$, то есть θ — дифференциал некоторой функции, получим

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}dF = &\left(\frac{1}{2}\left(\omega_1 + \omega_2^2\right) - \omega_0^0\right)\left(x^0\right)^2 + \\
&+\left(\frac{1}{2}\left(\omega_1^1 + \omega_2^2\right) - \omega_3^3\right)\left(x^3\right)^2 + x^0x^1(\omega^2 - \omega_1^0) + \\
&+x^0x^2\left(\omega^1 - \omega_2^0\right) + x^1x^3\left(\omega_3^2 - \omega_1^3\right) + x^2x^3\left(\omega_3^1 - \omega_2^3\right) + \theta F.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Из определения конгруэнции К2 следует

$$\begin{gathered}
\omega_0^3 = 0,\ \omega_3^0 = 0,\ \omega_1^2 = 0,\ \omega_2^1 = 0,\ \omega_1^3 = m\omega^2;\ \omega_2^3 = m\omega^1, \\
\omega_1^0 = n\omega_3^2,\ \omega_2^0 = n\omega_3^1,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2, \\
\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\,\omega_3^3 = b_1\omega^1 + b_2\omega^2,\ \omega_3^1 = c_1\omega^2;\ \omega_3^2 = c_2\omega^1,
\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$mnc_1c_2 \neq 0\,. \tag{1.5}$$

Продолжая подсистему пфаффовых уравнений

$$\omega_1^3 = m\omega^2,\ \omega_2^3 = m\omega^1,\ \omega_1^0 = n\omega_3^2,\ \omega_2^0 = n\omega_3^1, \tag{1.6}$$

получим

$$dm + m\Omega = 0\,,\ dn + n\Omega = 0\,, \tag{1.7}$$

где

$$\Omega = \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3\,. \tag{1.8}$$

Замыкая уравнения $\omega_1^2 = 0,\ \omega_2^1 = 0$ и (1.7), получим

$$(m-n)\omega^2 \wedge \omega_3^2 = 0,\ (m-n)\omega^1 \wedge \omega_3^1 = 0,$$
$$(m-n)(\omega_3^1 \wedge \omega^2 + \omega_3^2 \wedge \omega^1) = 0. \tag{1.9}$$

Учитывая в этих уравнениях (1.5), находим

$$m = n. \tag{1.10}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции K2 состоит из уравнений

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0,\ \omega_3^0 = 0,\ \omega_1^2 = 0,\ \omega_2^1 = 0,\ \omega_1^3 = m\omega^2,\ \omega_2^3 = m\omega^1, \\ \omega_1^0 = m\omega_3^2,\ \omega_2^0 = m\omega_3^1,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2, \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = b_1\omega^1 + b_2\omega^2,\ \omega_3^1 = c_1\omega^2,\ \omega_3^2 = c_2\omega^1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Теорема 1.1. *Конгруэнции K2 существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.*

Доказательство. Замыкание системы (1.11) имеет вид

$$\begin{cases} \triangle a_1 \wedge \omega^1 + \triangle a_2 \wedge \omega^2 = 0, \\ \triangle b_1 \wedge \omega^1 + \triangle b_2 \wedge \omega^2 = 0, \\ \triangle c_1 \wedge \omega^2 = 0, \\ \triangle c_2 \wedge \omega^1 = 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned} \triangle a_1 &= da_1 + a_1(\omega_0^0 - \omega_1^1), \\ \triangle a_2 &= da_2 + a_2(\omega_0^0 - \omega_2^2), \\ \triangle b_1 &= db_1 + b_1(\omega_0^0 - \omega_1^1), \\ \triangle b_2 &= db_2 + b_2(\omega_0^0 - \omega_2^2), \\ \triangle c_1 &= dc_1 + c_1(\omega_0^0 + \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3), \\ \triangle c_2 &= dc_2 + c_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Имеем

$$s1 = 4;\ q = 6,\ s2 = q - s1 = 2,\ Q = s1+2s2 = 8,$$
$$N = 3+3+1+1 = 8 = Q.$$

Система (1.11) — в инволюции и определяет решение с произволом двух функций двух аргументов, ч. т. д.

2. Фокальные точки квадрики и ассоциированных коник

Используя пфаффовы уравнения (1.11), запишем формулу (1.3) в виде

$$-\frac{1}{2}dF = F_1\omega^1 + F_2\omega^2 + \theta F\ , \tag{2.1}$$

где

$$F_1 = \frac{1}{2}a_1(x^0)^2 + \frac{1}{2}b_1(x^3)^2 - mc_2x^0x^1 + x^0x^2 + c_2x^1x^3 - mx^2x^3, \tag{2.2}$$
$$F_2 = \frac{1}{2}a_2(x^0)^2 + \frac{1}{2}b_2(x^3)^2 + x^0x^1 - mc_1x^0x^2 - mx^1x^3 + c_1x^2x^3.$$

Фокальные точки квадрики $Q \in K_2$ определяются системой алгебраических уравнений

$$2x^1x^2 - (x^0)^2 - (x^3)^2 = 0\,,\ F1 = 0,\ F2 = 0. \tag{2.3}$$

Из уравнений (2.3) следует, что точки A1 и A2 — сдвоенные фокальные точки коники $Q \in K_2$.

С каждой квадрикой $Q \in K_2$ ассоциируется пара коник

$$\varphi_1 \overset{def}{=} 2x^1x^2 - (x^0)^2 = 0,\ \ x^3 = 0\,; \tag{2.4}$$

$$\varphi_2 \overset{def}{=} 2x^1x^2 - (x^3)^2 = 0,\ \ x^0 = 0 \tag{2.5}$$

— коники C1 и C2.

Фокальные точки коники C1 определяются системой алгебраических уравнений (2.4) и уравнением

$$x^0\left(\frac{1}{2}x^0\left(a_1x^1 + a_2x^2\right) + m\left(c_1\left(x^2\right)^2 - c_2\left(x^1\right)^2\right)\right) = 0\,. \tag{2.6}$$

Фокальные точки коники С2 определяются системой алгебраических уравнений (2.5) и уравнением

$$x^3\left(\frac{1}{2}\left(b_1c_1x^2-b_2c_2x^1\right)x^3+m\left(c_2\left(x^1\right)^2-c_1\left(x^2\right)^2\right)\right)=0\,. \quad (2.7)$$

Анализируя эти системы уравнений, убеждаемся, что точки А1 (0,1,0,0) и А2 (0,0,1,0) — сдвоенные фокальные точки каждой из ассоциированных коник С1 и С2.

3. Прямолинейные конгруэнции (А1А2), (А0А3), ассоциированные с конгруэнцией K_2

Пусть

$$\Phi=t_1A_1+t_2A_2\,,\ \Psi=\tau_1A_0+\tau_2A_1 \quad (3.1)$$

— фокусы соответственно лучей А1А2 и А0А3. Уравнения для фокусов этих лучей и торсов прямолинейных конгруэнций (А1А2) и (А0А3) имеют вид

$$c_2t_1^2-c_1t_2^2=0\,,\ \tau_1^2-c_1c_2\tau_2^2=0\,; \quad (3.2)$$

$$c_2(\omega^1)^2-c_1(\omega^2)^2=0\,,\ c_2(\omega^1)^2-c_1(\omega^2)^2=0\,. \quad (3.3)$$

Приходим к следующим результатам.

Теорема 3.1. *1. Фокусы лучей А1А2 и А0А3 гармонически делят соответственно точки А1,А2 и А0,А3.*

2. Торсы прямолинейных конгруэнций (А1А2) и (А0А3) соответствуют.

3. Прямолинейная конгруэнция (А1А2) гармонична поверхностям (А0) и (А3); прямолинейная конгруэнция (А0А3) сопряжена поверхностям (А0) и (А3) [2, с. 251].

4. Конгруэнции K_2^0

Определение 4.1. *Конгруэнцией* K_2^0 *называется конгруэнция К2, удовлетворяющая соотношениям*

$$a1=a2=b1=b2=0,\ c1-c2=0,\ c_1\neq 0\,. \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. *Конгруэнции* K_2^0 *существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.*

Доказательство. Замыкание системы уравнений Пфаффа конгруэнции K_2^0 имеет вид

$$(d\ln c + \omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge \omega^2 = 0, \ (d\ln c - (\omega_1^1 - \omega_2^2)) \wedge \omega^1 = 0. \quad (4.2)$$

Продолжая (4.2), находим

$$\begin{cases} d\ln c = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 = -\alpha\omega^1 + \beta\omega^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Замыкая (4.3), получим

$$\vartriangle\alpha \wedge \omega^1 = 0, \ \vartriangle\beta \wedge \omega^2 = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\vartriangle\alpha = d\alpha + \alpha(\omega_0^0 - \omega_1^1), \ \vartriangle\beta = d\beta + \beta(\omega_0^0 - \omega_2^2). \quad (4.5)$$

Следовательно,

$$s1 = 2;\ q = 2 \quad S2 = 0,\ Q = 2,$$
$$N = 1 + 1 = 2 = Q.$$

Система в инволюции и определяет решение с произволом двух функций одного аргумента, ч. т. д. Имеем

$$\omega_0^0 = 0, \ \omega_3^3 = 0, \ \omega_1^1 = \frac{1}{2}(-\alpha\omega^1 + \beta\omega^2);$$
$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}(\alpha\omega^1 - \beta\omega^2). \quad (4.6)$$

Теорема 4.2. *Конгруэнция* K_2^0 *является голономной.*

Доказательство.

$$d\omega_0^0 = \omega^1 \wedge \omega_1^0 + \omega^2 \wedge \omega_2^0 = \omega^1 \wedge mc\omega^1 + \omega^2 \wedge mc\omega^2 \equiv 0,$$
$$d\omega_1^1 = \omega_1^0 \wedge \omega^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = mc\omega^1 \wedge \omega^1 + m\omega^2 \wedge c\omega^2 \equiv 0,$$
$$d\omega_2^2 = \omega_2^0 \wedge \omega^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 = mc\omega^2 \wedge \omega^2 + m\omega^1 \wedge c\omega^1 \equiv 0,$$
$$d\omega_3^3 = \omega_3^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 = c\omega^2 \wedge m\omega^2 + c\omega^1 \wedge m\omega^1 \equiv 0.$$

Список литературы

1. *Малаховский В. С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986.

2. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций. М. ; Л., 1950.

V. Malakhovsky, E. Yurova

Congruences of quadrics in three-dimensional projective space associated with pair of surfaces

Two-parametric family (congruence) K_2 of quadrics Q in three-dimensional projective space P_3 is investigated, possessing the following properties: on each quadric $Q \in K_2$ there are two different focal points A_1 and A_2 at which focal tangents intersect at one point A_0 and are the asymptotic tangents of the surface (A_0), and the tangents to the curves on the surface (A_i) that corresponds the focal curves on the surface (A_j) ($i, j, k = 1, 2; i \neq j$) also intersect at one point A3 and are the asymptotic tangents of the surface (A_3), mareover the asymtotic curves that envelop A_0A_i and A_3A_j are correspond, and A_0 and A_3 are polar conjugated.

UDC 514.764

J. Mikeš

Palacky University, Olomouc, Czech Republic

S. E. Stepanov, I. I. Tsyganok

Finance University under the Government of Russian Federation

Decomposition theorems of conformal Killing forms on totally umbilical submanifolds

A Riemannian manifold of positive curvature operator has been studied from many directions. It is well known, that an n-dimensional closed Riemannian manifold with positive curvature operator $\mathfrak{R}$ is a spherical space form and its Betti numbers $b_1(M')$, …, $b_{n-1}(M')$ are zero. In addition, we proved that on an